

Универзитет саопшти
Д. Станковић

02.04.2012
05 270/8 - -

НАСТАВНО – НАУЧНОМ ВЕЋУ ПРИРОДНОГ – МАТЕМАТИЧКОГ
ФАКУЛТЕТА У КРАГУЈЕВЦУ

На седници Наставно – научног већа Природно – математичког факултета у Крагујевцу одржаној 07. 03. 2012. године одређени смо у Комисију за оцену и одбрану докторске дисертације кандидата Ралета Николића под насловом “Стивови о нејокејној њачки на ѡросѡорима са негеѡерминисѡичком меѡриком”. Након детаљног прегледа поменуе докторске дисертације подносимо Наставно – научном већу следећи

ИЗВЕШТАЈ

Докторска дисертација “Стивови о нејокејној њачки на ѡросѡорима са негеѡерминисѡичком меѡриком” припада актуелној области нелинеарне функционалне анализе, а једним делом и области топологије, као и примењене математике. Подручје истраживања наведене теме је веома актуелно подручје рада којим се баве математичари из разних земаља света. Математичари који су својим упечатљивим радом допринели развоју ове области су: *S. Banach, F. Browder, W. Kirk, D. Boyd, J. Wong, G. Jungck* и многи други, међу којима су и наши математичари и то М. Тасковић, Љ. Ђирић и други. У самој области овог дела математичке анализе објављен је велики број научних радова и монографија, а скорашњи резултати објављени у еминентним светским часописима отворили су многа питања и простор за даља истраживања.

Докторска дисертација кандидата Ралета Николића написана је на укупно 98 стране и подељена је на следеће делове.

- 1) Предѡвор (странице *i – iii*)
- 2) Садржај (странице *iv – v*)
- 3) Прва глава: Основне дефиниције и резултати (странице 1 – 26)
- 4) Оригинални резултати који су подељени у две главе.
 - i. Друга глава: Нејокејне њачке за ѡресликавања са нелинеарним условом дефинисана на ѡросѡорима са негерминисѡичком меѡриком (странице 27 – 63)
 - ii. Трећа глава: Генералисани инверз и асимѡиотске релације еквиваленције (странице 64 – 81)
- 5) Литература (странице 82 – 88 која садржи 107 библиографских јединица)
- 6) Додатак (странице 89 – 93) који се састоји од дела који представља сажетак дисертације дат на енглеском језику (*Summary*) и биографије кандидата.

Преглед садржаја урађене дисертације

У *Предговору* је дат сажет преглед резултата по поглављима, који су добијени у самој дисертацији, као и преглед резултата који су били полазиште и мотивација за аутора приликом истраживања и добијање поменутих резултата.

У првој глави која носи назив *Основне дефиниције и резултати* је дат преглед основних резултата из теорије непокретне и заједничке непокретне тачке на метричким просторима, који су били мотивација за добијање дела оригиналних резултата. Са једне стране, полазећи од чувеног Банаховог става о непокретној тачки из 1922. године указано је на нека од његових многобројних уопштења на метричким просторима. У том смислу, са становишта неких од добијених оригиналних резултата, од посебног интереса јесу нелинеарни контрактивни услови чије је испитивање на метричким просторима иницирано радовима *Rakotch*-а и *Boyd*-а и *Wong*-а. Са друге стране, један део оригиналних резултата се односи на нелинеарна неекспанзивна пресликавања. Први резултати на метричким просторима у вези са постојањем непокретне тачке за неекспанзивна пресликавањима могу се наћи у радовима *Kirk*-а, *Browder*-а и *Göhde*-а из шездесетих година прошлог века и неки оригинални резултати представљају уопштења ових резултата. Такође, поред одређивања непокретне тачке, од интереса је и одређивање заједничке непокретне тачке за два или више пресликавања. За метричке просторе оно је иницирано у раду *Jungck*-а. У току протеклих деценија, многе генерализације поменутих резултата су се појавиле, како на метричким просторима, тако и на просторима са богатијом структуром који обухватају ове просторе. С обзиром да су сви резултати који су изнети у овој дисертацији, а у вези су са непокретном тачком, добијени на вероватносним, фази метричким и L -фази метричким просторима, аутор у посебним одељцима посвећује пажњу особинама ових простора. Посебан одељак у првој глави посвећен је инверзима и класама правилно променљивих функција и он је у вези са резултатима који су дати у трећој глави.

Друга глава која носи назив *Непокретне тачке за пресликавања са нелинеарним условом дефинисана на просторима са негерметричком метриком* се састоји из четири одељка, уводног и још три која сачињавају оригинални резултати. Како у теорији непокретне тачке, важну улогу играју комутативност, компатибилност пресликавања, као и њихове генерализације, у одељку 2.2 аутор полазећи од ових појмова доказује постојање и јединственост заједничке непокретне тачке за четири пресликавања на L -фази метричким просторима. Конкретним примером илуструје добијени резултат. Аутор, након тога јасно показује да добијени резултат уопштава многе од резултата добијених у протеклих неколико година на L -фази метричким просторима. Такође, аутор примерима, коментарима и напоменама указује на узајамни однос слабо компатибилних, компатибилних и комутативних пресликавања. На крају овог одељка је дат аналогон добијеном резултату на вероватносним Менгеровим просторима. У одељку 2.3 су доказани ставови о постојању и јединствености непокретне тачке, као и заједничке непокретне тачке за два пресликавања који проширују резултат Љ. Ђирића (L. V. Ćirić, *On fixed point of generalized contractions on probabilistic metric spaces*, Publ. Inst. Math, **18(32)** (1975), pp 71 – 78), у коме је

уведен појам генералисане контракције линеарног типа на вероватносним Менгеровим просторима. У одељку 2.4, који има три пододељка, аутор дефинишући појам стрикне конвексности на вероватносним Менгеровим просторима, доказује постојање и јединственост непокретне тачке за нелинеарна контрактивна пресликавања са ширим кодоменом. Такође, један део резултата, у вези са стриктном конвексношћу, се односи и на доказивање постојања непокретне тачке за нелинеарна неекспанзивна пресликавања. У доказу овог резултата аутор користи један од еквивалената Аксиоме избора – Зорнову лему. Јасно је показано да добијени резултати представљају уопштења, како неких од фундаменталних резултата из теорије непокретне тачке неекспанзивних пресликавања, тако и резултата који су у последњих неколико година публиковани. Аутор конкретним примерима илуструје добијене резултате.

Трећа глава која носи назив *Генералисани инверз и асимптотске релације еквиваленције* се састоји од два одељка оригиналних резултата, као и уводног одељка. У одељцима 3.2 и 3.3 полазећи од појма правилне променљивости који је увео Ј. Карамата (који је након тога надограђиван од стране многих наших математичара, као што су В. Авакумовић, С. Аљанчић и Р. Бојанић, и многих страних математичари *L. de Haan, N. Bingham, E. Seneta* и других), затим генералисаног инверза, слабе и јаке асимптотске релације еквиваленције у класи A , чији су елементи све неоппадајуће и неограничене функције које су дефинисане на интервалу $[a, +\infty)$, где је $a > 0$, као и од *Сјава* A [који је у једном свом облику доказан у раду Balkema A. A., Geluk J. L., de Haan L. *An extension of Karamata's Tauberian theorem and its connection with complementary convex function*, Quart. J. Math. Oxford Ser. **30** (No 2), 1979, pp 385 – 416, такође, погледати Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. *Regular variation*, Cambridge University Press, 1987, p. 190, 14 (ii), (iii)], аутор даје оригиналне резултате. Такође, примерима су илустроване одређене особине функција и њихових генералисаних инверза у посматраним класама функција.

Најважнији резултати кандидата у докторској дисертацији су следећи.

1. На L -фази метричком простору који је комплетан у односу на посматрану негацију, четири пресликавања A, B, S и T таква да је пар пресликавања $\{A, S\}$ компатибилан, а пар пресликавања $\{B, T\}$ слабо компатибилан, при чему је пресликавање A или S непрекидно и која задовољавају одређене услове, као и нелинеарни контрактивни услов имају јединствену заједничку тачку.
2. На вероватносном Менгеровом простору са непрекидном t -нормом T која задовољава услов $T(a, b) \geq \min\{a, b\}$, за свако $a, b \in [0, 1]$, два компатибилна пресликавања $f, g : X \rightarrow X$, која задовољавају нелинеарни контрактивни услов, за која важи $g(X) \subseteq f(X)$, при чему је пресликавање g непрекидно пресликавање и $g(X)$ је вероватносно ограничен скуп и где је простор X g -орбитално комплетан, имају јединствену заједничку непокретну тачку.

3. На стриктно конвексном вероватносном Менгеровом простору за пресликавање $f : C \rightarrow X$, ($C \subseteq X$), које задовољава нелинеарни контраktivни услов, при чему је $f(C)$ вероватносно ограничен скуп и важи додатни услов $f(\partial C) \subseteq C$, постоји јединствена непокретна тачка.
4. На стриктно конвексном вероватносном Менгеровом простору са конвексном структуром $S(x, y, \theta)$, при чему је $K \subseteq X$ непразан, конвексан и компактан подскуп простора X , за пресликавање $f, g : K \rightarrow K$, које задовољава нелинеарни контраktivни услов, при чему је $g(K) \cap K \subseteq f(K)$, постоји заједничка непокретна тачка.
5. У одељку 3.2 наведени су резултати који представљају једну од потпуних карактеризација функционалне класе $ORV \cap A$, где је ORV класа свих O -регуларно променљивих функција у смислу Карамате, а где је A класа чији су елементи све неоппадајуће и неограничене функције које су дефинисане на интервалу $[a, +\infty)$, где је $a > 0$.
6. У одељку 3.3 дати су ставови који представљају једну од потпуних карактеризација функционалне класе $R_\infty \cap A$, где R_∞ представља класу рапидно променљивих функција у смислу *de Haan*-а, а где је A класа чији су елементи све неоппадајуће и неограничене функције које су дефинисане на интервалу $[a, +\infty)$, где је $a > 0$. Такође, дата је и једна од карактеризација функционалне класе $PI^* \cap A$.

Списак коришћене литературе садржи 107 референци.

Значај и допринос докторске дисертације са становишта актуелног стања у одређеној научној области

Значај области која је тема ове докторске дисертације показује импозантан број радова, који се објављује у последњих неколико година. У овој дисертацији добијени су резултати којима се врше нове карактеризације, као и кумулација постојећих карактеризација, за нелинеарне услове контраktivности и неекспанзивности, чијом се научном семиотиком постојећи резултати класификују и повезују. Исто тако, дате су и нове карактеризације класа регуларно променљивих функција. На тај начин је овим радом дат значајан допринос овој научној области – математичкој анализи.

Оцена да је урађена докторска дисертација резултат оригиналног научног рада кандидата у одређеној научној области

Имајући у виду актуелно стање у изучавању постојања јединствене непокретне тачке на просторима са недерминистичком метриком, за условима нелинеарне контраktivности и неекспанзивности, као и нове карактеризације одређених класа регуларно променљивих функција, докторска дисертација Ралета

Николића садржи оригиналне резултате који нису били предмет ниједног до сада објављеног истраживања у овој области.

Преглед остварених резултата кандидата у одређеној научној области

Кандидат Рале Николић је до сада публикувао следећа три научна рада:

1. Ješić, S. N., Babačev, N. A., O' Regan, D., **Nikolić, M. R.**, *Common fixed point theorems for four mappings defined on L-fuzzy metric spaces with nonlinear contractive type conditions*, Fixed point Theory, 10 No. 2 (2009), 259-274, ISSN 1583-5022, **M 22 (IF: 0,700)**;
2. D. Djurčić, **R. Nikolić**, A. Torgašev, *The weak asymptotic equivalence and generalized inverse*, Lithuanian Mathematical Journal, Vol. 50 No. 1 (2010), 34-42, ISSN 0363-1672, **M 23 (IF: 0,486)**;
3. D. Djurčić, **R. Nikolić**, A. Torgašev, *The weak and strong asymptotic equivalence relations and generalized inverse*, Lithuanian Mathematical Journal, Vol. 51 No. 4 (2011), 472-476, ISSN 0363-1672, **M 23 (IF: 0,486)**;

Резултати дати у овој докторској дисертацији су представљени и на пет међународних конференција:

1. Бабачев, Н., Јешић, С., **Николић, Р.**, *Spaces with non – deterministic distances and fixed point theorems*, Књига апстраката, страна 40, 12. Serbian Mathematical Congress, 28. 08. – 02. 09. 2008. год, ПМФ Нови Сад, Србија. **M 34**
2. Siniša N. Ješić, **R. Nikolić**, *Common fixed point theorems for R - weakly commuting mapping defined on fuzzy metric spaces*, International Mathematical Conference: Topics in Mathematical Analysis and Graph Theory (A satellite meeting to ICM 2006), Београд, Program and Abstract Book, страна 23 – 24, 1. – 4. септембар, 2006, Електротехнички факултет Београд. **M 34**
3. Ješić, S., Babačev, N., **Nikolić, R.**, *Common fixed point theorems for mappings defined on spaces with non – deterministic distances*, Analysis, Topology and Applications 2008 (ATA 2008), Књига апстраката, страна 24, 30. 05. – 06. 04. 2008. год. Врњачка Бања, Србија. **M 34**
4. Đurčić D., **Nikolić R.**, Torgašev A., *The weak and the strong asymptotic equivalence and generalised inverse*, (ATA 2010), Књига апстраката, стр. 22, јун 2010. год. Врњачка Бања, Србија. **M 34**
5. Đurčić D., **Nikolić R.**, Torgašev A., *The weak asymptotic equivalence and generalised inverse*, PRIM 09, Књига апстраката, стр. 18, ПМФ Нови Сад, Суботица, 25. – 27. мај 2009. год. **M 34**

Оцена о испуњености обима и квалитета у односу на пријављену тему

Приложени текст дисертације у погледу обима и квалитета испуњава све захтеве који су постављени пријавом теме докторске дисертације. Одобрени циљеви истраживања су остварени, структура завршне дисертације одговара одобреном садржају и добијени су очекивани резултати.

Научни резултати докторске дисертације

Део научних резултата дисертације публикован је кроз три чланка:

1. Ješić, S. N., Babačev, N. A., O' Regan, D., **Nikolić, M. R.**, *Common fixed point theorems for four mappings defined on L-fuzzy metric spaces with nonlinear contractive type conditions*, Fixed point Theory, 10 No. 2 (2009), 259-274, ISSN 1583-5022, **M 22 (IF: 0,700)**;
2. D. Djurčić, **R. Nikolić**, A. Torgašev, *The weak asymptotic equivalence and generalized inverse*, Lithuanian Mathematical Journal, Vol. 50 No. 1 (2010), 34-42, ISSN 0363-1672, **M 23 (IF: 0,486)**;
3. D. Djurčić, **R. Nikolić**, A. Torgašev, *The weak and strong asymptotic equivalence relations and generalized inverse*, Lithuanian Mathematical Journal, Vol. 51 No. 4 (2011), 472-476, ISSN 0363-1672, **M 23 (IF: 0,486)**;

Применљивост и корисност резултата у теорији и пракси

Резултати са теоријског аспекта могу наћи примене у даљим истраживањима у овој области. Такође, истраживања из области теорије непокретне тачке на просторима са недетерминистичком метриком имају примену у физици и то посебно у квантној механици, као и у теорији струна и у ε -бесконечно теорији, док се теорија регуларно променљивих функција примењује у теорији вероватноће.

Начин и презентовање резултата научној јавности

Део резултата до којих је кандидат дошао представљен је научној јавности у три поменута публикована научна рада, као и на поменутим конференцијама на којима је кандидат учествовао.

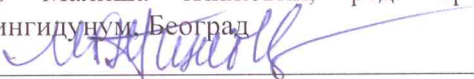

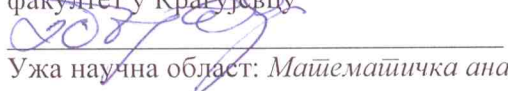
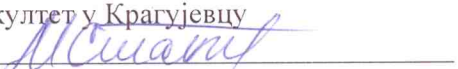
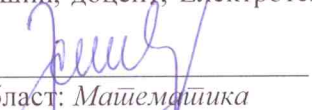
ЗАКЉУЧАК И ПРЕДЛОГ

На основу напред изнетог може се закључити да је кандидат **Рале Николић** у својој докторској дисертацији са успехом објединио више праваца истраживања, како у теорији непокретне тачке на просторима са недерминистичком метриком, тако и у асимптотској анализи. Ова истраживања представљају резултате обједињене у целину, који су добијени у дужем временском периоду у сарадњи са нашим и иностраним математичарима. Вредност ове дисертације се огледа и у томе што су резултати презентовани у њој објављени у научним часописима са *SCI* листе (један у часопису *Fixed Point Theory* и два у часопису *Lithuanian Mathematical Journal*).

Због тога Комисија предлаже Наставно – научном већу Природно – математичког факултета у Крагујевцу, да рад под називом “*Ситавови о нејокрејној тачки на просторима са недетерминистичком метриком*” кандидата Ралета Николића прихвати као докторску дисертацију и одреди датум одбране.

У Крагујевцу, Београду и Чачку,
27. март 2012. године

Комисија

1. Др Малиша Жижовић, ред. проф., Универзитет Сингидунум, Београд

Ужа научна област: *Математика*
2. Др Драган Ђурчић, ред. проф., Технички факултет у Чачку

Ужа научна област: *Математика*
3. Др Дејан Бојовић, ванр. проф., Природно – математички факултет у Крагујевцу

Ужа научна област: *Математичка анализа са применама*
4. Др Марија Станић, доцент, Природно – математички факултет у Крагујевцу

Ужа научна област: *Математичка анализа са применама*
5. Др Синиша Јешић, доцент, Електротехнички факултет у Београду

Ужа научна област: *Математика*